170

Formes quadratiques sur un e.v. de dim. finie, orthogonalité, isotropie. Applications.

[Rom]

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif tel que $car(\mathbb{K}) \neq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

I] Formes quadratiques et algèbre bilinéaire

1] Formes quadratiques et formes bilinéaires

XV.1

Définition 1 : Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{K} \\ (x;y) \mapsto \varphi(x;y) \end{array}$ telle que pour tout $x, y \in E$, $z \mapsto \varphi(x;z)$ et $z \mapsto \varphi(z;y)$ sont linéaires. Une forme bilinéaire est symétrique (resp. anti-symétrique/alternée) si pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x;y) = \varphi(y;x)$ (resp. $\varphi(x;y) = -\varphi(y;x)$).

Exemple 2 : Pour tout $(\ell_1;\ell_2) \in \mathcal{L}(E)^2$, l'application $(x;y) \mapsto \ell_1(x)\ell_2(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Notation 3 : On note $\mathcal{L}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires, $S_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et $A_2(E)$ celui des formes alternées.

Définition 4 : On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x;x)$ avec φ une forme bilinéaire sur E. On note $Q(E)$ leur ensemble.

Remarque 5 : Il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique.
$\varphi(x;y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $\psi(x;y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ définissent la même forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Théorème 6 : Soit $q \in Q(E)$.
Alors : il existe une unique $\varphi \in S_2(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x;x)$.
Un tel φ est appelé forme polaire de q.

Corollaire 7 : Soit $q \in Q(E)$ et φ sa forme polaire.
Alors : pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x;y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$
pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

2] Matrice associée à une forme quadratique

XV.1

Définition 8 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base de E. La matrice de $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $A := (\varphi(e_i;e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$

Théorème 9 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$
Alors : pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x;y) = {}^tXAY$ avec $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = (y_i)_{i=1}^n$

Théorème 10 : $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ ssi il existe $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\ell_1; \dots; \ell_n \in E^*$ linéairement indépendantes telles que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x;y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}\, \ell_i(x)\ell_j(y)$

Théorème 11 : $\varphi \in S_2(E)$ (resp. $\varphi \in A_2(E)$) ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique (resp. alternée)

Théorème 12 : Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E, $P = Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$ et $A_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$, $A_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$.
Alors : $A_2 = {}^tPA_1P$

Définition 13 : Le discriminant dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ d'une forme bilinéaire φ est : $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi) := \det((\varphi(e_i;e_j))_{1 \leq i,j \leq n})$.

Proposition 14 : Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E, $P := Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$
Alors : pour toute $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, $\Delta_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = \det(P)^2 \Delta_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$.

Définition 15 : Soit q forme quadratique sur E de forme polaire φ. La matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $(\varphi(e_i;e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et le discriminant de q dans $\mathcal{B}$ est $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$, on le note $\Delta_q(\varphi)$.

Proposition 16 : Soit $q \in Q(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(q) = (a_{i,j})$
Alors : pour tout $x \in E$, $q(x) = {}^tXAX = \sum a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$

3] Application au contrôle de solutions d'équations différentielles

[Rom]

Lemme 17 : Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice dont les vp sont de partie réelle strictement négative.
Alors : il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

Théorème 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors : Les solutions maximales de $X' = AX$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $Z(t) = Ce^{tA}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

[Rom]

[Isen]

Théorème 19 : (de sortie de tout compact) Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, Ω ouvert connexe de E et $f : I \times \Omega \to E$ continue, localement lipschitzienne en la deuxième variable et soit z solution maximale de $y' = f(t;y)$ d'intervalle de définition J.

Alors : si $\sup(J) < \sup(I)$, alors z explore en temps fini i.e. pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $T_K \in J$ tel que pour tout $t \in [T_K ; \sup(J)[$, $z(t) \in \Omega \setminus K$

Théorème 20 : (de Liapounov) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f(0) = 0$ et telle que Df_0 a toutes ses v.p. de partie réelle strictement négative.

Alors : 0 est un point d'équilibre stable de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ i.e. pour tout y_0 suffisamment proche de 0, la solution maximale y est bien définie sur $[0 ; +\infty[$ et tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $t \to +\infty$

II] Outils pour étudier les formes quadratiques

1] Orthogonalité et isotropie

Soit par la suite $q \in Q(E)$ et $\varphi \in S_2(E)$ sa forme polaire.

[Rom] XV.2

Définition 21 : Deux vecteurs $x, y \in E^2$ sont dits orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x;y) = 0$. Pour toute partie non-vide $X \subset E$, l'orthogonal de X relativement à φ est : $X^\perp := \{y \in E \mid \forall x \in X, \varphi(x;y) = 0\}$.

Propriétés 22 : Soit $X, Y \subset E$

Alors : $\{0\}^\perp = E$; $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

$X \subset (X^\perp)^\perp$ et si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$

Exemple 23 : Pour le produit scalaire usuel sur $E = \mathbb{R}^2$, $E^\perp = \{0\}$ mais pour $\varphi(x;y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $E^\perp = \{(x_1 ; -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

En général, un vecteur peut être orthogonal à lui même sans être nul.

Définition 24 : On dit qu'un vecteur $x \in E$ est isotrope relativement à φ si $q(x) = 0$. Leur ensemble est le cône isotrope de φ : $C_\varphi = q^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid q(x) = \varphi(x;x) = 0\}$.

[Rom] XV.2

Exemple 25 : Dans $\mathbb{R}^3$, pour $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, on a $C_\varphi = \{(x_1 ; x_2 ; x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$

2] Noyau et rang

Définition 26 : Le noyau de φ est l'orthogonal de E. On le note $\ker(\varphi) := \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x;y) = 0\}$.

Lemme 27 : $\ker(\varphi) \subseteq C_\varphi$

Théorème 28 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Alors : $\ker(\varphi) = \ker(u) = \ker(A)$

[Rom]

Définition 29 : On dit que $\varphi \in S_2(E)$ est non-dégénérée si $\ker(\varphi) = \{0\}$, que $q \in Q(E)$ est définie si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $q(x) \neq 0$. Le rang de φ est $\mathrm{rg}(q) := n - \dim(\ker(q))$.

Théorème 30 : Soit F sous-espace vectoriel de E.

Alors : $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$ avec égalité si q non-dégénérée

De plus, $E = F \oplus F^\perp$ ssi $q_{|F}$ est non-dégénérée.

Théorème 31 : Soit $q \in Q(E)$ non-dégénérée et $C_\varphi \neq \{0\}$.

Alors : il existe une base E formée de vecteurs isotropes.

3] Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

IX.11

Proposition 32 : Soit $q \in Q(E)$ non-dégénérée, $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors : il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : pour tout $x, y \in E$, $\varphi(f(x);y) = \varphi(x; f^*(y))$.

[Gri]

Proposition 33 : Soit $q \in Q(E)$ non dégénérée, $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors : $\forall x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$ ssi $\forall x, y \in E$, $\varphi(f(x); f(y)) = \varphi(x;y)$

ssi $f^* \circ f = \mathrm{id}$

IX.12 [Gri]

Définition 34 : Le groupe orthogonal de q (non dégénérée) est : $O(q) := \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f^* \circ f = id\}$ et le groupe spécial orthogonal de q est : $SO(q) := \{f \in O(q) \mid \det(f) = 1\}$.

Théorème 35 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q \in Q(E)$ définie positive.
Alors : $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément si $u \in O(q)$, u est produit d'au plus n réflexions.

[Tsen]

Lemme 36 : Avec les mêmes hypothèses et $n \geq 3$, soit τ_1, τ_2 réflexions.
Alors : il existe des renversements σ_1, σ_2 tels que : $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 37 : Avec les mêmes hypothèses et $n \geq 3$.
Alors : $SO(q)$ est engendré par les renversements. Plus précisément si $u \in SO(q)$, u est produit d'au plus n renversements.

III] Classification et réduction de formes quadratiques

1] Réduction et méthode de Gauss

IX.5

Définition 38 : Une base $(e_i)_{i=1}^n$ de E est orthogonale pour $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ si pour tout $i \neq j$, $\varphi(e_i; e_j) = 0$. Elle est dite orthonormée si pour tout i, j $\varphi(e_i; e_j) = \delta_{i,j}$

Proposition 38 : $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ est une base orthogonale ssi $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1;e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(e_n;e_n) \end{pmatrix}$
Dans ce cas, $rg(q)$ est le nombre de coefficients diagonaux non-nuls.

[Gri]

Théorème 40 : Soit $q \in Q(E)$ avec $E \neq \{0\}$.
Alors : il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ tel que pour tout $x = \sum_i^n x_i e_i \in E$, on a : $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ avec $r = rg(q)$ ou encore $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

VII.3

Proposition 41 : Soit $q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$ (méthode de Gauss en termes carrés)
(1) On ordonne suivant la variable x_1
(2) On écrit les termes contenant x_1 comme début d'un carré
(3) On obtient le carré d'une forme linéaire plus des termes pas en x_1
(4) On recommence avec les termes ne contenant pas x_1.

Exemple 42 : $\varphi(x;x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$
$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$

IX.6 [Gri]

Proposition 43 : (méthode de Gauss avec termes rectangles)
(1) On choisit un terme rectangle kx_ix_j, $k \neq 0$ et on calcule q'_{x_i} et q'_{x_j}
(2) On a $q(x) = \frac{1}{k}\varphi_1(x)\varphi_2(x) +$ termes ne contenant ni x_i, ni x_j.
(3) On écrit $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}\left[(\varphi_1+\varphi_2)^2 - (\varphi_1-\varphi_2)^2\right]$
(4) On recommence selon la nature des termes restant.

Exemple 44 : $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$
$= \frac{1}{20}\left[5x_1 + 5x_2 + 3x_3\right]^2 - \frac{1}{20}\left[5x_1 + 5x_2 - 3x_3\right]^2 - \frac{18}{5}x_3^2$

Théorème 45 : À partir de la réduction de Gauss, on peut déterminer une base orthogonale pour q en résolvant $\begin{cases} x_1' = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ x_n' = \varphi_n(x) \end{cases}$.

Exemple 46 : $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$
$= (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$
$= \varphi_1(x)^2 + 2\varphi_2(x)^2 - \varphi_3(x)^2$
On résout $\begin{cases} x_1' = \varphi_1(x) \\ x_2' = \varphi_2(x) \\ x_3' = \varphi_3(x) \end{cases}$ d'où $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x'$ d'où une base orthogonale

2] Classification et signature

IX.7 [Gri]

Théorème 47 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $q \in Q(E)$.
Alors : il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base de E telle que pour tout $x = \sum x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$, $r = rg(q)$ ou encore $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 48 : Dans ce cas, il existe une base orthonormée ssi $rg(q) = n$ ssi q est non-dégénérée

IX.8

Théorème 49 : (de Sylvester) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q \in Q(E)$.
Alors : il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ tel que pour tout $x = \sum x_i e_i$,
$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ i.e. $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$
avec $r = rg(q)$, p ne dépendant que de q.
Le couple $(p; r-p) =: sign(q)$ est appelé signature de q.

Corollaire 50 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q \in Q(E)$.
Alors : (1) q est définie positive ssi $sign(q) = (n; 0)$ (i.e. E est euclidien) ssi il existe des bases orthonormées
(2) q est définie négative ssi $sign(q) = (0; n)$
(3) q est non-dégénérée (i.e. $N(q) = \{0\}$) ssi $sign(q) = (p; n-p)$

Exemple 51 : $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$
$= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 + 8x_3^2$
d'où : $sign(q) = (2; 1)$

3) Étude des isométries associées à une forme quadratique

[H2G2]

Proposition 52 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Définition 53 : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note $O(p;q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique

$$\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

de matrice $I_{(p;q)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

i.e. $O(p;q) = \{ M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p;q)} {}^tM = I_{(p;q)} \}$

Théorème 54 : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Alors : $O(p;q)$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi

[Gri] Algèbre Linéaire – Grifone

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométries – Caldero